Meccanica applicata alle macchine

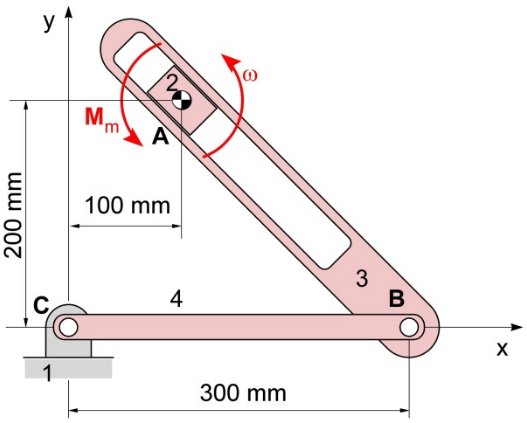
Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

Ed.: De Agostini

Esercizio 6.27

Sia assegnato il meccanismo mostrato in figura, che lavora in presenza di gravità in un piano verticale. L'unico membro di massa non trascurabile è l'asta omogenea 4, di massa *m=2 kg*; le perdite possono essere modellate tramite la presenza di uno smorzatore viscoso di coefficiente *c=10 Ns/m* tra pattino e glifo.

Per la sola configurazione mostrata in figura determinare la coppia motrice M_m applicata al pattino 2 che lo fa ruotare alla velocità angolare costante di *20 rpm*.



Svolgimento

Analisi cinematica

Il punto A_2 del pattino è fisso, in quanto è presente una cerniera a telaio; inoltre il pattino stesso è collegato al glifo attraverso una coppia prismatica: si usa il teorema delle velocità relative per collegare la velocità del punto A_2, solidale al pattino 2, a quella del corrispondente punto A_3, solidale al glifo 3:

$$\mathbf{v}_{A\_3} = \mathbf{v}_{A\_2} + \mathbf{v}_{A3\_A2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} v_{A3\_A2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} \tag{1}$$

In (1) si è imposto che la velocità relativa tra pattino e guida, incognita in modulo e verso, abbia la stessa direzione del glifo stesso.

La legge fondamentale della cinematica dei corpi rigidi, applicata al glifo 3, consente di calcolare la velocità del punto B_3 (la velocità angolare del glifo 3 è la stessa di quella del pattino 2 ed è assegnata, ω):

$$\mathbf{v}_{B\_3} = \mathbf{v}_{A\_3} + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_{B\_3} = \mathbf{v}_{A\_3} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} + \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \omega \tag{3}$$

La velocità del punto **B₄**, solidale alla manovella 4 (che ovviamente coincide con quella del punto **B₃** già espressa in (3)) può anche essere collegata a quella del perno **C**, appartenente allo stesso corpo 4:

$$\mathbf{v}_{B\_4} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_4 \times (\mathbf{B} - C) = \boldsymbol{\omega}_4 \times \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \omega_4 \tag{4}$$

Facendo sistema tra le equazioni (3) e (4) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} + \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \omega_4 \tag{5}$$

che rappresenta un sistema di 2 equazioni scalari nelle 2 incognite ω_4 e v_{A3_A2}; sviluppando il sistema si trova:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} + 0{,}2\omega = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} + 0{,}2\omega = 0{,}3\omega_4 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} v_{A3\_A2} = -0{,}2\sqrt{2}\omega = -0{,}59 \text{ m/s} \\ \omega_4 = \frac{4}{3}\omega = 2{,}79 \text{ rad/s} \end{cases} \tag{7}$$

È ormai facile calcolare le velocità che erano rimaste precedentemente incognite:

$$\mathbf{v}_{A3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} = \begin{bmatrix} -0{,}42 \\ 0{,}42 \\ 0 \end{bmatrix} m/s \tag{1bis}$$

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}84 \\ 0 \end{bmatrix} m/s \tag{4bis}$$

L'analisi di accelerazione si imposta nello stesso modo risolvendo il seguente sistema di 2 equazioni vettoriali:

$$\begin{cases}\mathbf{a}_{A3} = \mathbf{a}_{A2} + \mathbf{a}_{A3\_A2} + \mathbf{a}_{cor} \\ \mathbf{a}_{B3} = \mathbf{a}_{A3} - \omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{A}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \times (\mathbf{B}-\mathbf{A}) \\ \mathbf{a}_{B4} = \mathbf{a}_C - \omega_4^2(\mathbf{B}-\mathbf{C}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \times (\mathbf{B}-\mathbf{C})\end{cases} \tag{8}$$

Pertanto dalle (8), imponendo che sia $\mathbf{a}_{B3} = \mathbf{a}_{B4}$:

$$\mathbf{a}_{A3\_A2} + \mathbf{a}_{cor} - \omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = -\omega_4^2(\mathbf{B}-\mathbf{C}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \times (\mathbf{B}-\mathbf{C}) \tag{9}$$

Nel ricavare la (9) si è tenuto conto che i punti $\mathbf{A}_2$ e **C** hanno accelerazione nulla in quanto fissi a telaio e che la velocità angolare del glifo ω è costante (per cui la sua derivata è nulla).

I vari termini che compaiono nell’equazione precedente possono essere direttamente espressi nelle direzioni coordinate, imponendo anche la conoscenza della direzione dell’accelerazione relativa:

$$\mathbf{a}_{A3\_A2} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a_{A3\_A2}$$

$$\mathbf{a}_{cor} = 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_{A3\_A2} = 2\boldsymbol{\omega} \times \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A3\_A2} = 2\omega \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-0{,}2\sqrt{2}\omega\right) = -\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \cdot 0{,}4\omega^2$$

$$-\omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = -\omega^2 \begin{bmatrix}0{,}2\\-0{,}2\\0\end{bmatrix}$$

$$-\omega_4^2(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = -\left(\frac{4}{3}\omega\right)^2 \begin{bmatrix}0{,}3\\0\\0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \frac{1{,}6}{3}\omega^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \times (\mathbf{B}-\mathbf{C}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \times \begin{bmatrix}0{,}3\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0{,}3\\0\end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_4$$

da cui:

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a_{A3\_A2} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \cdot 0{,}4\omega^2 - \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} 0{,}2\omega^2 = -\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \frac{1{,}6}{3}\omega^2 + \begin{bmatrix}0\\0{,}3\\0\end{bmatrix} \dot{\omega}_4 \tag{10}$$

che proiettata nelle 2 direzioni cartesiane costituisce un sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite a_{A3_A2} e $\dot{\omega}_4$:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} a_{A3\_A2} - 0{,}4\omega^2 - 0{,}2\omega^2 = -\frac{1{,}6}{3}\omega^2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} a_{A3\_A2} - 0{,}4\omega^2 + 0{,}2\omega^2 = 0{,}3\dot{\omega}_4 \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} a_{A3\_A2} = \frac{2\sqrt{2}}{30}\omega^2 = 0{,}41 \; m/s^2 \\ \dot{\omega}_4 = -\frac{8}{9}\omega^2 = -3{,}90 \; rad/s^2 \end{cases} \tag{12}$$

Anche in questo caso si possono ora calcolare le accelerazioni che erano rimaste precedentemente incognite:

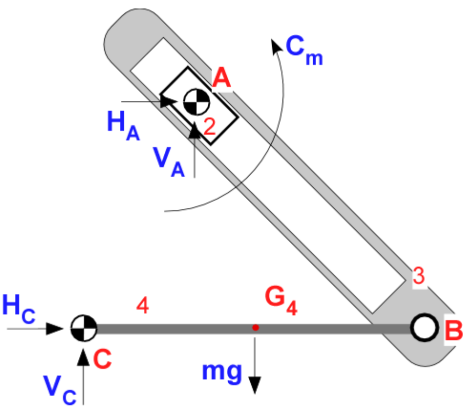
$$\mathbf{a}_{A3} = \mathbf{a}_{A2} + \mathbf{a}_{A3\_A2} + \mathbf{a}_{cor} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a_{A3\_A2} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0{,}4\omega^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{30}\omega^2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0{,}4\omega^2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{2}{30}\omega^2 = \begin{bmatrix} -1{,}46 \\ -2{,}05 \\ 0 \end{bmatrix} m/s^2 \tag{8a-bis}$$

$$\mathbf{a}_{B3} = -\omega_4^2(\mathbf{B}-\mathbf{C}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \times (\mathbf{B}-\mathbf{C}) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{16}{30}\omega^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\omega}_4 =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{16}{30}\omega^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \left(-\frac{8}{90}\omega^2\right) = -\frac{8}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\omega^2 = \begin{bmatrix} -2{,}34 \\ -1{,}17 \\ 0 \end{bmatrix} m/s^2 \tag{8c-bis}$$

Dinamica inversa



A questo punto, ai fini del calcolo della coppia motrice è indispensabile calcolare la velocità e l'accelerazione del baricentro della manovella 4:

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_4 \times (\mathbf{G}-\mathbf{C}) = \boldsymbol{\omega}_4 \times \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}15 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 0{,}2\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}42 \\ 0 \end{bmatrix} \ \mathrm{m/s} \qquad (13)$$

Per il calcolo dell'accelerazione invece:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_C - \omega_4^2 (\mathbf{G}-\mathbf{C}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \times (\mathbf{G}-\mathbf{C}) = -\begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_4^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}15 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\omega}_4 =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{8}{30}\omega^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{3}{20}\left(-\frac{8}{9}\omega^2\right) = -\frac{4}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega^2 = \begin{bmatrix} -1{,}17 \\ -0{,}58 \\ 0 \end{bmatrix} \ \mathrm{m/s^2} \qquad (14)$$

Per la determinazione della coppia motrice istantanea M_m si applica l'equazione di bilancio energetico, tenendo conto dei segni dei vari contributi:

$$P_m + P_u + P_p = \frac{dT}{dt} \qquad (15)$$

Considerando la potenza dissipata nello smorzatore, l'equazione precedente diventa:

$$\mathbf{M}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{F}_{smorz} \cdot \mathbf{v}_{A3\_A2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} I_4 \boldsymbol{\omega}_4 \cdot \boldsymbol{\omega}_4\right) = m\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{a}_G + I_4 \boldsymbol{\omega}_4 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \qquad (16)$$

$$\mathbf{M}_m \cdot \boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2\omega \\ 0 \end{bmatrix} - b \cdot v_{A3\_A2}^2 = m \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T 0{,}2\omega \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(-\frac{4}{30}\omega^2\right) + \frac{1}{12} m (0{,}3)^2 \left(\frac{4}{3}\omega\right) \cdot \left(-\frac{8}{9}\omega^2\right)$$

$$M_m \cdot \omega - 0{,}2mg\omega - b \cdot \left(-0{,}2\sqrt{2}\omega\right)^2 = m \cdot 0{,}2\omega \cdot \left(-{}^4\!/\!_{30}\,\omega^2\right) + \frac{9}{1200} m \left(\frac{4}{3}\omega\right) \cdot \left(-\frac{8}{9}\omega^2\right)$$

$$M_m = 0{,}2mg + 0{,}08b \cdot \omega - \frac{32}{900} m\omega^2 = 5{,}29 \ Nm \qquad (17)$$

Si noti che in (16) il termine $\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{a}_G$ rappresenta il prodotto tra la velocità del punto **G** e la sua accelerazione tangenziale, ovvero $\mathbf{v}_G \cdot \dot{\mathbf{v}}_G$, in cui ovviamente le 2 grandezze scalari devono essere prese con il segno appropriato.