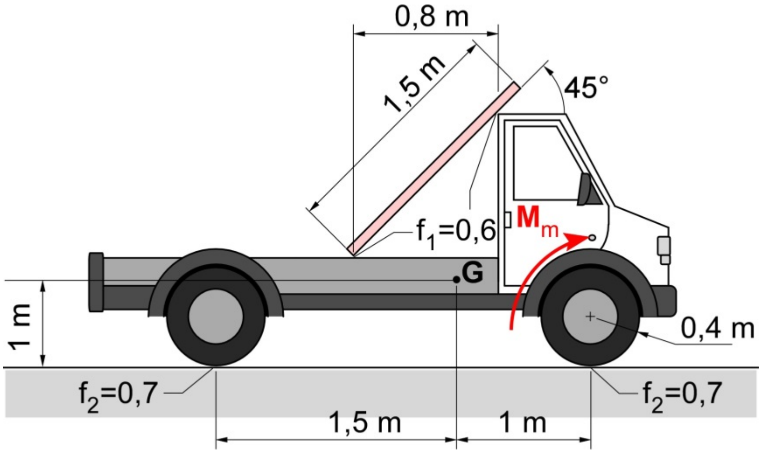
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

Ed.: De Agostini

Esercizio 6.15

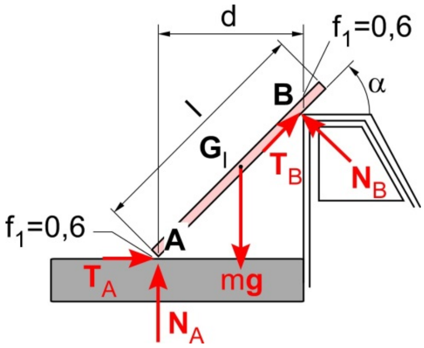
Una lastra sottile ed omogenea di lunghezza *l=1,5 m* è appoggiata come mostrato in figura sul pianale di carico di un furgoncino di massa m_f*=3 Mg*. Si chiede di determinare la minima coppia motrice M_m alle ruote anteriori che dà origine ad un movimento relativo dell'asta rispetto al furgone e di verificare le condizioni di aderenza del veicolo in tale circostanza. Sono assegnati i raggi delle ruote *r = 400 mm*, la posizione del baricentro del veicolo rispetto agli assali, il coefficiente di attrito statico $f_1 = 0,6$ tra asta e pianale nei due punti di appoggio e quello $f_2 = 0,7$ tra ruote e piano stradale.



Svolgimento

Si disegni il diagramma di corpo libero della lastra, indicando con *m* la massa della lastra, come mostrato nella figura seguente. Le due condizioni limite che possono presentarsi sono:

1) Ribaltamento della lastra, che conserva aderenza in **A** ma si stacca nel punto **B**
2) Strisciamento della lastra, che avviene simultaneamente nei punti **A** e **B**



Caso 1)

Essendo nulla la reazione in **B,** l'equilibrio della lastra si riduce a:

$$\begin{cases} N_A = mg \\ T_A = ma_f \\ T_A \dfrac{l}{2} sen\alpha = N_A \dfrac{l}{2}\cos\alpha \end{cases} \tag{1}$$

Si noti che in questo caso limite, la lastra perde il contatto in **B** ma non inizia ancora a ruotare per cui l'accelerazione di tutti i punti è pari a quella del furgone $\mathbf{a_f}$.

Segue la verifica di aderenza:

$$\frac{T_A}{N_A} = \cot\alpha = 1 > 0{,}6 = f_1 \tag{2}$$

La condizione (2) non è verificata per cui l'ipotesi fatta di ribaltamento della lastra non è risultata corretta.

Caso 2)

In questo caso entrambi i punti **A** e **B** di contatto sono sede di strisciamento. L'equilibrio dinamico dell'asta in questo caso si scrive:

$$\begin{cases} N_A - mg + N_B\cos\alpha + T_B\mathrm{sen}\alpha = 0 \\ T_A - N_B\mathrm{sen}\alpha + T_B\cos\alpha = ma_f \\ -N_A \dfrac{l}{2}\cos\alpha + T_A\dfrac{l}{2}\mathrm{sen}\alpha + N_B\left(\dfrac{d}{\cos\alpha} - \dfrac{l}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

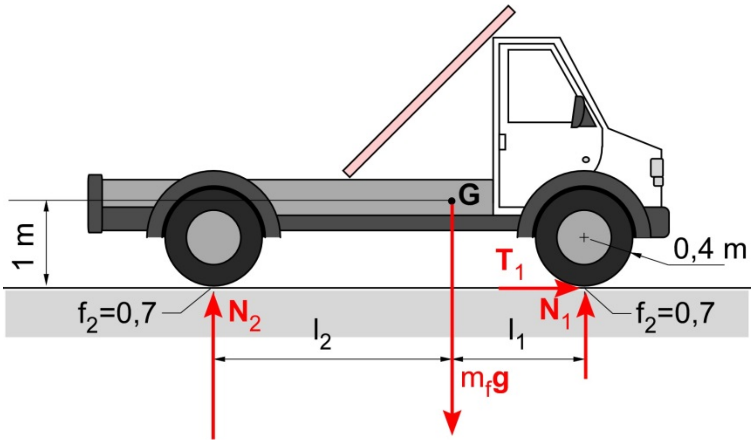
Anche in questo caso limite, per le considerazioni già fatte, le equazioni (3) sono state scritte in condizioni "quasi statiche".

Per risolvere il sistema (3), che contiene 5 incognite, è necessario imporre le condizioni di strisciamento nei punti **A** e **B**:

$$\begin{cases} T_A = f_1 N_A \\ T_B = f_1 N_B \end{cases} \tag{4}$$

Risolvendo il sistema di equazioni (3-4) si trova:

$$\begin{cases} N_A = mg\dfrac{2d - l\cos\alpha}{l\cos^3\alpha - l\cos\alpha + 2d - f_1^2 l\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha} \\ N_B = mg\dfrac{l\cos\alpha\left[\cos\alpha - f_1\mathrm{sen}\alpha\right]}{l\cos^3\alpha - l\cos\alpha + 2d - f_1^2 l\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha} \\ a_f = g\dfrac{2df_1 - l\left(1+f_1^2\right)\mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\left[lf_1^2\cos^3\alpha - lf_1^2\cos\alpha + l\cos^3\alpha - l\cos\alpha + 2d\right]} = 2{,}67\ \mathrm{m/s^2} \end{cases} \tag{5}$$



A questo punto si scrive l'equilibrio del furgone:

$$\begin{cases} T_1 = m_f a_f = 7\,996 \text{ N} \\ N_1 + N_2 = m_f g = 29\,430 \text{ N} \\ T_1 h + N_1 l_1 - N_2 l_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} T_1 = m_f a_f = 7\,996 \text{ N} \\ N_1 = \dfrac{l_2 g - h a_f}{l_1 + l_2} m_f = 14\,460 \text{ N} \\ N_2 = m_f g - N_1 = 14\,970 \text{ N} \end{cases} \tag{7}$$

Nelle (6) si è trascurata la forza T_2 dovuta alle resistenze al rotolamento delle ruote posteriori. La coppia motrice alle ruote anteriori si trova da un semplice equilibrio alla rotazione ed è data da:

$$M_m = T_1 r = 3\ 198 \text{ Nm} \tag{8}$$

Occorre ancora verificare che per tale coppia le ruote anteriori del furgone restino in aderenza; si trova:

$$\frac{T_1}{N_1} = 0{,}55 < 0{,}70 = f_2 \tag{9}$$

Il furgone è quindi in grado di sviluppare l'accelerazione richiesta mantenendo in aderenza le ruote motrici.