Meccanica applicata alle macchine

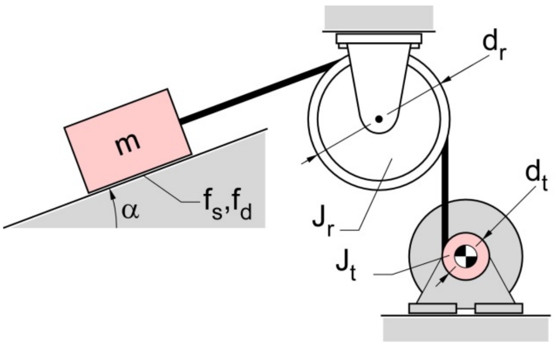
Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

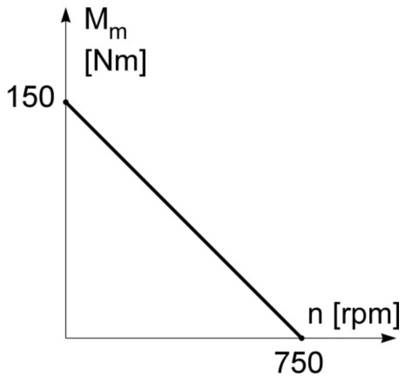
Ed.: De Agostini

Esercizio 6.38

Nel sistema di sollevamento mostrato in figura, il motore pone in rotazione il tamburo (di diametro d_t *= 250 mm* e momento d'inerzia J_t *= 0,2 kg* m^2*)* su cui si avvolge la fune che, dopo esser transitata sulla puleggia di rinvio (di diametro d_r *= 500 mm* e momento d'inerzia J_r *= 0,4 kg* m^2*)*, trascina la massa *m = 100 kg* lungo il piano inclinato di α *= 20°* sull'orizzontale, vincendo l'attrito di coefficiente $f_s = f_d = 0{,}3$. Essendo nota la curva caratteristica del motore, riportata in figura, determinare:

a) l'accelerazione del motore allo spunto;
b) la velocità del carico a regime;
c) le tensioni della fune nei due tratti rettilinei per entrambi i casi precedenti.





Svolgimento

a) Accelerazione allo spunto

Si scriva il bilancio di potenze per il sistema in esame:

$$M_m(\omega_m)\cdot\omega_m - mg\cdot sen\alpha\cdot v - f\cdot mg\cdot\cos\alpha\cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_t\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_r\omega_r^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) \qquad (1)$$

in cui si è indicata con ω_r la velocità angolare della puleggia e si è posto $f = f_s = f_d = 0{,}3$.

La coppia motrice M_m può essere espressa in funzione della velocità angolare ω_m facendo riferimento alla caratteristica statica mostrata in figura; si ha:

$$M_m(\omega_m) = M_M\,\frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} \qquad (2)$$

dove si è indicato con ω_s la velocità angolare di sincronismo del motore espressa in rad/s:

$$\omega_s = n_s\,\frac{2\pi}{60} = 78{,}5\ \text{rad/s} \qquad (3)$$

e con M_M*=150 Nm* la coppia allo spunto. Tenendo anche conto che le velocità del sistema sono legate da:

$$\omega_m \frac{d_t}{2} = \omega_r \frac{d_r}{2} = v \tag{4}$$

la legge del moto (1) può essere riscritta come:

$$M_M \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} \cdot \omega_m - mg \cdot sen\alpha \cdot \omega_m \frac{d_t}{2} - f \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot \omega_m \frac{d_t}{2} =$$

$$= J_t \omega_m \dot{\omega}_m + J_r \left(\frac{d_t}{d_r}\right)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + m\left(\frac{d_r}{2}\right)^2 \omega_m \dot{\omega}_m \tag{5}$$

Sviluppando i calcoli e dividendo per ω_m si trova:

$$M_M \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} - mg \cdot sen\alpha \frac{d_t}{2} - f \cdot mg \cdot \cos\alpha \frac{d_t}{2} = \left[J_t + J_r \left(\frac{d_t}{d_r}\right)^2 + m\left(\frac{d_r}{2}\right)^2 \right] \dot{\omega}_m \tag{6}$$

Allo spunto, essendo il sistema fermo (ω_m*=0*), l'accelerazione del motore vale:

$$\dot{\omega}_{m0} = \frac{M_M - (sen\alpha + f_s \cdot \cos\alpha) mg \dfrac{d_t}{2}}{J_t + J_r \left(\dfrac{d_t}{d_r}\right)^2 + m\left(\dfrac{d_r}{2}\right)^2} = 39{,}5 \ \text{rad/s}^2 \tag{7}$$

e quella del carico:

$$\dot{v}_0 = \dot{\omega}_{m0} \frac{d_t}{2} = 4{,}9 \ \text{m/s}^2 \tag{8}$$

b) Moto a regime

Nel caso di moto a regime, la (1) diventa:

$$M_m(\overline{\omega}_m) \cdot \overline{\omega}_m - mg \cdot sen\alpha \cdot \overline{v} - f_d \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot \overline{v} = 0 \tag{9}$$

in cui si sono barrate le grandezze di regime. Tenendo conto di (2) e dividendo per la velocità di rotazione del motore, si trova:

$$M_M \frac{\omega_s - \overline{\omega}_m}{\omega_s} \cdot \overline{\omega}_m = (sen\alpha + f_d \cdot \cos\alpha) \cdot mg \cdot \overline{\omega}_m \frac{d_t}{2} \tag{10}$$

$$\overline{\omega}_m = \left[1 - (sen\alpha + f_d \cdot \cos\alpha) \frac{mg \cdot d_t}{2M_M} \right] \omega_s = 38{,}5 \ \text{rad/s} \tag{11}$$

$$\overline{v} = \overline{\omega}_m \frac{d_t}{2} = 4{,}8 \ \text{m/s} \tag{12}$$

c) Tensione della fune

A regime la tensione della fune $\overline{T}$ è la stessa nei 2 rami della trasmissione, in quanto la puleggia di rinvio è folle; pertanto il valore della tensione nel caso di moto a regime si può ricavare dall'equilibrio del motore:

$$\overline{T}\,\frac{d_t}{2} = M_m\left(\overline{\omega}_m\right) \tag{13}$$

oppure, più semplicemente, dall'equilibrio della massa traslante:

$$\overline{T} = \left(sen\alpha + f_d \cdot \cos\alpha\right)mg = 612 \text{ N} \tag{14}$$

Allo spunto, invece, la tensione nei 2 rami è diversa in quanto viene accelerata anche la puleggia di rinvio; in questo caso l'equilibrio del motore si scrive:

$$M_M - T_{10}\,\frac{d_t}{2} = J_m\dot{\omega}_{m0} \rightarrow T_{10} = \frac{M_M - J_m\dot{\omega}_{m0}}{d_t/2} = 1137 \text{ N} \tag{15}$$

mentre l'equilibrio della massa traslante fornisce:

$$T_{20} = \left(sen\alpha + f_s \cdot \cos\alpha\right)mg + m\dot{v}_0 = 1105 \text{ N} \tag{16}$$

Ovviamente, come verifica, deve valere:

$$\left(T_{10} - T_{20}\right)\frac{d_t}{2} = J\dot{\omega}_{r0} \tag{17}$$