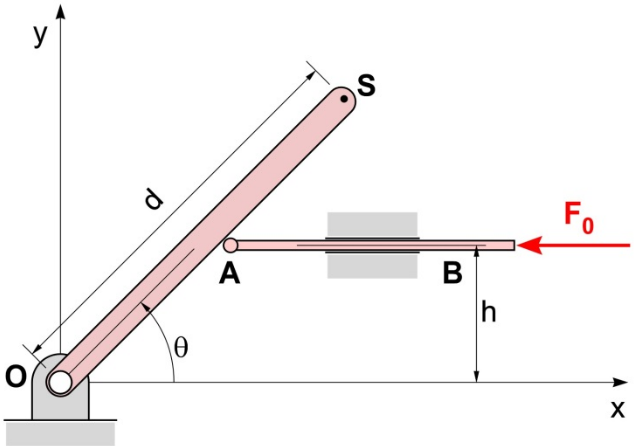
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

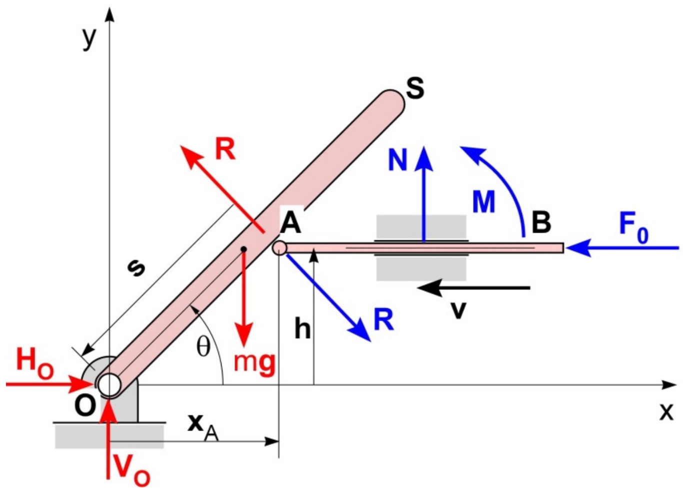
Ed.: De Agostini

Esercizio 6.23

La rotazione dell'asta omogenea **OS**, di massa *m* e lunghezza *d*, è regolata dall'asta **AB**, di massa trascurabile. Ricavare l'espressione della velocità angolare $\omega(\theta)$ della barra **OS** nel caso in cui sia assegnata una spinta costante F_0; inoltre determinare il valore ω^* di tale velocità quando la barra **OS** si viene a trovare in posizione verticale, sapendo che nella configurazione iniziale la barra è ferma e forma un angolo di $\pi/4$ con l'orizzontale.



Svolgimento



Si tratta di un problema di dinamica diretta, in quanto è assegnata la forza F_0 (costante) che agisce sul movente ed occorre determinare il moto del sistema, in particolare l'espressione della velocità angolare ω del cedente in funzione della sua posizione θ.

Si scrive l'equilibrio dinamico della barra **OS**:

$$R \cdot s - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos\vartheta = J\dot{\omega} \tag{1}$$

in cui si è indicato con J il momento d'inerzia della barra rispetto alla cerniera **O**:

$$J = \frac{md^2}{3} \tag{2}$$

Nell'equazione (1) occorre esprimere la forza di contatto R ed il suo braccio s in funzione dell'angolo θ; dall'equilibrio alle traslazioni orizzontali dell'asta di comando:

$$F_0 = Rsen\vartheta \rightarrow R = \frac{F_0}{sen\vartheta} \tag{3}$$

mentre dalla geometria del meccanismo si ha:

$$s \,\mathrm{sen}\,\vartheta = h \rightarrow s = \frac{h}{\mathrm{sen}\,\vartheta} \tag{4}$$

Sostituendo (3-4) in (1) si trova:

$$\frac{F_0 h}{sen^2\vartheta} - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos\vartheta = J\dot{\omega} \tag{5}$$

La (5) può essere rielaborata come segue:

$$\frac{F_0 h}{sen^2\vartheta} - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos\vartheta = J \frac{d\omega}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\left(\frac{F_0 h}{sen^2\vartheta} - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos\vartheta\right) d\vartheta = J\omega d\omega$$

$$-F_0 h\left(\frac{1}{\tan\vartheta} - \frac{1}{\tan\vartheta_0}\right) - mg \, {}^{d}\!/_{2} \left(sen\vartheta - sen\vartheta_0\right) = {}^{1}\!/_{2} J\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \tag{6}$$

che fornisce l'espressione di ω cercata. Imponendo le condizioni iniziali, $\omega(\pi/4)=0$, si ha:

$${}^{1}\!/_{2} J\omega^2 = -F_0 h(\cot\vartheta - 1) - mg \, {}^{d}\!/_{2} \left(sen\vartheta - {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}\right)$$

$$\omega(\vartheta)^2 = \frac{6F_0 h}{md^2}(1 - \cot\vartheta) + \frac{3g}{d}\left({}^{\sqrt{2}}\!/_{2} - sen\vartheta\right) \tag{7}$$

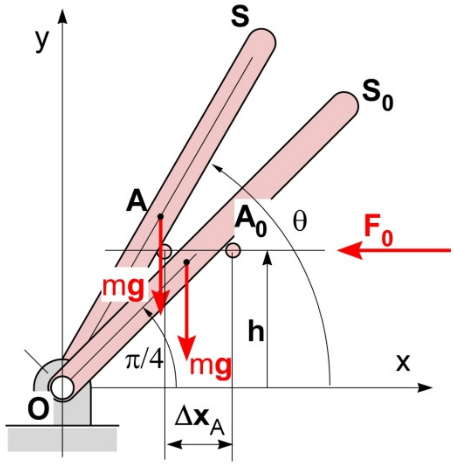
In particolare, per $\theta=\pi/2$:

$$\omega^2\left({}^{\pi}\!/_{2}\right) = \frac{6F_0 h}{md^2} + \frac{3g}{d}\left({}^{\sqrt{2}}\!/_{2} - 1\right) \tag{8}$$

$$\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)=\omega^{*}=\sqrt{\frac{6h}{md^{2}}F_{0}+\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-2\right)\frac{g}{d}} \tag{9}$$

L'integrale generale del moto (7) era ricavabile in modo più semplice scrivendo l'equazione di bilancio energetico:

$$L_m - L_r - L_p = \Delta T \tag{10}$$



Nel caso presente la forza resistente (peso dell'asta) e quella motrice F_0 sono a potenziale e vengono trascurate le resistenze passive; per esprimere il lavoro della forza motrice è necessario calcolare il suo spostamento Δx_A, che vale:

$$\Delta x_A=\frac{h}{\tan\vartheta_0}-\frac{h}{\tan\vartheta}=\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\tan\vartheta}\right)h=\left(1-\frac{1}{\tan\vartheta}\right)h \tag{11}$$

Pertanto si trova ancora una volta l'espressione già trovata in (6):

$$F_0 h\left(\frac{1}{\tan\vartheta_0}-\frac{1}{\tan\vartheta}\right)-mg\frac{L}{2}\left(sen\vartheta-sen\vartheta_0\right)=\frac{1}{2}J\left(\omega^2-\omega_0^2\right)$$