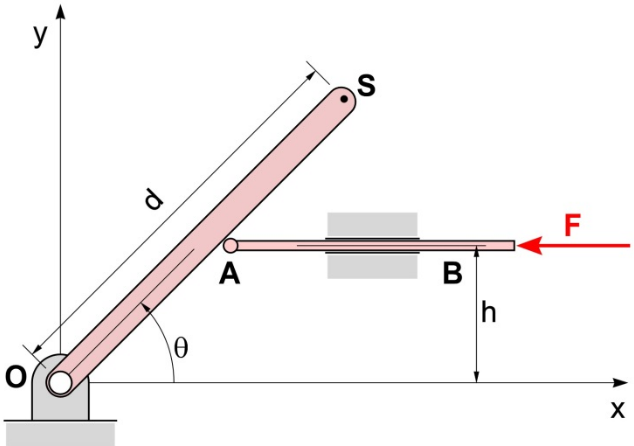
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

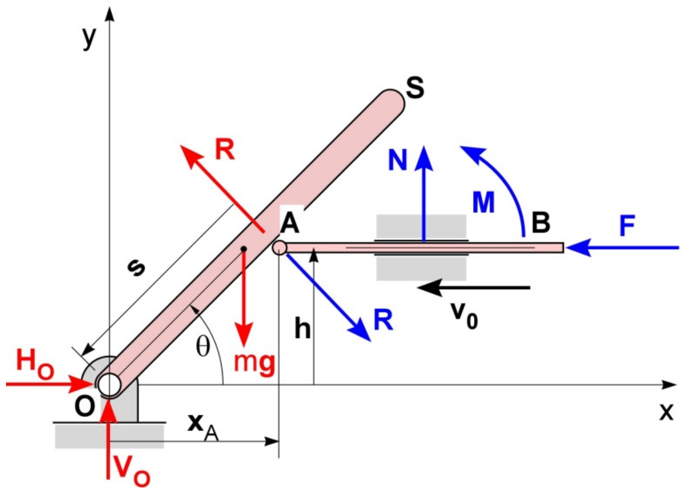
Ed.: De Agostini

Esercizio 6.22

La rotazione dell'asta omogenea **OS**, di massa m e lunghezza d, è regolata dall'asta **AB**, di massa trascurabile. Ricavare l'espressione della forza $F(\theta)$ che spinge l'asta **AB** nel caso in cui la velocità v_0 dell'asta stessa sia assegnata e costante; inoltre determinare il valore F^* di tale forza quando la barra **OS** si viene a trovare in posizione verticale.



Svolgimento



Si tratta di un problema di dinamica inversa, in quanto è assegnato il moto (del movente) ed occorre determinare la forza $F(\theta)$ che lo genera. Assumendo come coordinata libera l'angolo

θ, come richiesto, occorre prima di tutto studiare la cinematica del sistema, per determinare in funzione di θ il moto di tutti i membri con massa del sistema; in particolare nel caso in esame va ricavata l'espressione dell'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ dell'asta **OS**.

L'equazione di chiusura del meccanismo fornisce subito:

$$x_A = \frac{h}{\tan \vartheta} \tag{1}$$

che derivata rispetto al tempo consente di legare la velocità v_0 di scorrimento dell'asta (costante ed assegnata) alla velocità angolare ω della barra **OS**:

$$\dot{x}_A = -\frac{h}{sen^2 \vartheta}\dot{\vartheta} \tag{2}$$

Sostituendo $\dot{x}_A = -v_0$ e risolvendo per $\omega = \dot{\vartheta}$, si trova:

$$\omega(\vartheta) = \frac{v_0}{h} sen^2 \vartheta \tag{3}$$

L'accelerazione angolare si può ottenere per semplice derivazione dell'espressione precedente:

$$\dot{\omega}(\vartheta) = \frac{v_0}{h}(2 sen \vartheta \cos \vartheta)\omega = 2\frac{v_0^2}{h^2} sen^3 \vartheta \cos \vartheta \tag{4}$$

A questo punto si scriva l'equilibrio della barra **OS** alle rotazioni intorno al polo **O**; a tal fine occorre determinare la forza di contatto **R** tra barra ed asta, che può essere fatto con facilità impostando l'equilibrio alle traslazioni orizzontali dell'asta:

$$F = R sen \vartheta \tag{5}$$

L'equilibrio della barra si scrive infine:

$$R \cdot s - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos \vartheta = J\dot{\omega} \tag{6}$$

in cui si è indicato con *J* il momento d'inerzia della barra rispetto alla cerniera **O**:

$$J = \frac{md^2}{3}$$

L'equazione di equilibrio (6) può essere riformulata esprimendo la forza di contatto *R* ed il suo braccio *s* in funzione dell'angolo θ:

$$\frac{F}{sen \vartheta} \cdot \frac{h}{sen \vartheta} - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos \vartheta = J\dot{\omega}$$

$$\frac{Fh}{sen^2 \vartheta} - mg \, {}^{d}\!/_{2} \cos \vartheta = J\dot{\omega} \tag{7}$$

Infine è possibile sostituire in (7) l'espressione ricavata in (4) per l'accelerazione angolare della barra, nel caso di velocità costante dell'asta scorrevole:

$$\frac{Fh}{sen^2\vartheta} - mg\,{}^{d}\!/_{2}\cos\vartheta = 2J\,\frac{v_0^2}{h^2}\,sen^3\vartheta\cos\vartheta$$

per cui l'espressione ricercata della forza *F* vale:

$$F(\vartheta) = \frac{4Jv_0^2 sen^3\vartheta + mgdh^2}{2h^3}\,sen^2\vartheta\cos\vartheta$$

$$F(\vartheta) = \frac{md}{6h^3}\left(4dv_0^2 sen^3\vartheta + 3gh^2\right)sen^2\vartheta\cos\vartheta \tag{8}$$

da cui si vede che $F^*=F(\pi/2)=0$.

Il problema poteva anche essere affrontato, in modo più sintetico, tramite la scrittura dell'equazione di equilibrio energetico, in forma differenziale:

$$P_m - P_r - P_p = \frac{dT}{dt} \qquad (9$$

che nel presente caso si scrive:

$$F\cdot v - mg\,{}^{L}\!/_{2}\cos\vartheta\cdot\omega = \frac{d\left({}^{1}\!/_{2}\,J\omega^2\right)}{dt} \tag{10}$$

$$F(\vartheta)\cdot v_0 - mg\,{}^{L}\!/_{2}\cos\vartheta\cdot\omega = J\omega\dot{\omega}$$

$$F(\vartheta)\cdot v_0 - mg\,{}^{L}\!/_{2}\cos\vartheta\cdot\frac{v_0}{h}\,sen^2\vartheta = J\,\frac{v_0}{h}\,sen^2\vartheta\cdot 2\,\frac{v_0^2}{h^2}\,sen^3\vartheta\cos\vartheta \tag{11}$$

che conduce ovviamente sempre allo stesso risultato (8).