Meccanica applicata alle macchine

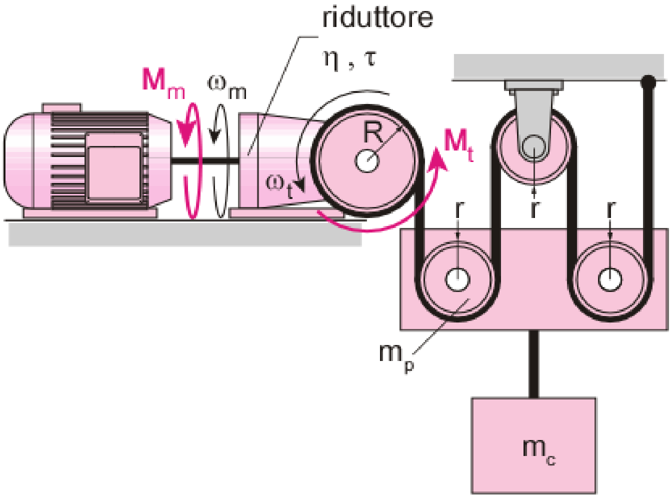
Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

Ed.: De Agostini

Esercizio 6.29

Un motore elettrico con potenza nominale di 6 kW a 1430 rpm solleva un carico di massa m_c = 2000 kg tramite la macchina a fune mostrata in figura: il tamburo, di raggio R = 300 mm e momento d'inerzia J_t = 8 kg m^2, è collegato al motore tramite un riduttore di rendimento η = 0,85 e rapporto di trasmissione τ; le pulegge, supposte omogenee, hanno raggio r = 150 mm e massa m_p = 20 kg; il momento d'inerzia del motore vale J_m = 0,02 kg m^2; si trascurino il peso della fune e del bozzello mobile e tutte le perdite ad eccezione di quelle nel riduttore.

– determinare il rapporto di trasmissione τ fra l'albero motore e il tamburo che consente al motore di lavorare in condizioni nominali; determinare anche la velocità del carico, la coppia sull'albero del tamburo e la tensione della fune.
– calcolare l'accelerazione del carico allo spunto sapendo che viene applicata una coppia motrice doppia di quella nominale.



Svolgimento

Parte a: moto a regime

La coppia del motore in condizioni nominali vale:

$$M_n = {}^{P}\!/_{\omega_n} = 40\ Nm \tag{1}$$

Si calcola ora la coppia resistente al tamburo in condizioni di regime. L'equilibrio verticale del bozzello mobile del paranco fornisce la tensione della fune (uguale in tutti i tratti in assenza di dissipazioni):

$$T = \frac{(m_c+2m_p)g}{4} = 5\,003\ N \qquad (2)$$

per cui la coppia resistente al tamburo è:

$$M_t = TR = 1\,501\ Nm \qquad (3)$$

A questo punto il bilancio energetico del riduttore si scrive:

$$M_t\omega_t = \eta\ M_n\omega_n \qquad (4)$$

per cui il rapporto di trasmissione cercato vale:

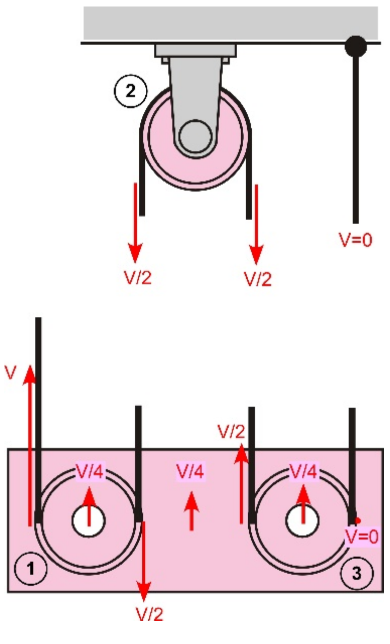
$$\tau = \frac{\omega_t}{\omega_n} = \eta\frac{M_n}{M_t} = 0{,}023 = 1{:}\,44 \qquad (5)$$

Lo schema delle velocità sui vari rami della trasmissione è quello mostrato nella figura seguente; pertanto la velocità del carico a regime è:

$$v_c = \frac{1}{4}\omega_t R = \frac{\tau\omega_n R}{4} = 0{,}25\ m/s \qquad (6)$$

La (6) poteva anche ricavarsi immediatamente ricordando che per paranchi con *tiro diretto* (cioè quando forza motrice e forza resistente hanno verso opposto) la velocità del ramo mobile è *(n+1)* volte quella del carico, con *n* numero totale di carrucole.

Parte b: avvio



La coppia del motore allo spunto vale:

$$M_s = 2M_n = 80\ Nm \qquad (7)$$

La coppia resistente al tamburo che corrisponde al peso delle masse collegate al bozzello mobile ha sempre l'espressione:

$$M_t = \frac{(m_c+2m_p)g}{4}R \qquad (8)$$

Si noti che in questo caso il tiro fune *T'* ha un valore maggiore del caso statico *T*, ma l'effetto delle inerzie sarà valutato attraverso l'equazione di bilancio energetico. Per quanto riguarda le inerzie del carico, queste vengono dapprima ridotte al tamburo imponendo l'equivalenza dell'energia cinetica.

$$\frac{1}{2}J_t^*\omega_t^2 = \frac{1}{2}J_t\omega_t^2 + \frac{1}{2}J_p\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_p v_c^2 + \frac{1}{2}J_p\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_p\omega_3^2 + \frac{1}{2}m_p v_c^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2 \qquad (9)$$

in cui si sono numerate le pulegge da 1 a 3 spostandosi dal tamburo al capocorda fisso a telaio; esse hanno tutte identico momento d'inerzia baricentrico J_p:

$$J_p = \frac{1}{2}m_p r^2 = 0{,}225\ kg\ m^2 \qquad (10)$$

Per ricavare l'espressione di J_t^*, occorre esprimere tutte le velocità in funzione di quella angolare del tamburo ω_t; indicando con *v* la velocità della fune che si avvolge sul tamburo dell'argano si ottiene:

$$\omega_1 = \frac{3}{4}\frac{v}{r} = \frac{3}{4}\frac{R}{r}\omega_t \qquad (11)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{v}{r} = \frac{1}{2}\frac{R}{r}\omega_t \qquad (12)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{4}\frac{v}{r} = \frac{1}{4}\frac{R}{r}\omega_t \qquad (13)$$

Tenendo conto che la velocità v_c del carico (del bozzello mobile e delle masse ad esso collegate) è stata già ricavata in (6), la (9) si può riscrivere:

$$\frac{1}{2}J_t^*\omega_t^2 = \frac{1}{2}J_t\omega_t^2 + \frac{1}{2}J_p\left(\frac{3}{4}\frac{R}{r}\omega_t\right)^2 + \frac{1}{2}m_p\left(\frac{1}{4}\omega_t R\right)^2 + \frac{1}{2}J_p\left(\frac{1}{2}\frac{R}{r}\omega_t\right)^2 + \frac{1}{2}J_p\left(\frac{1}{4}\frac{R}{r}\omega_t\right)^2 + \frac{1}{2}m_p\left(\frac{1}{4}\omega_t R\right)^2 + \frac{1}{2}m_c\left(\frac{1}{4}\omega_t R\right)^2 \qquad (14)$$

e quindi si ottiene infine:

$$J_t^* = J_t + \frac{7}{8}J_p\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}m_p(R)^2 + \frac{1}{16}m_c(R)^2 = 20{,}3\ kg\ m^2 \qquad (15)$$

A questo punto tutto il sistema può essere riferito all'albero motore tramite la (6.74) del libro, che in questo caso si scrive:

$$M_s - \frac{\tau}{\eta}\frac{(m_c+2m_p)g}{4}R = \left(J_m + \frac{\tau^2}{\eta}J_t^*\right)\dot{\omega}_m \qquad (16)$$

da cui si ricava facilmente l'accelerazione angolare del motore $\dot{\omega}_m = 1\ 241\ rad/s^2$

L'accelerazione del carico è pertanto:

$$\dot{v}_c = \frac{1}{4}\dot{\omega}_t R = \frac{1}{4}\tau\dot{\omega}_m R = 2{,}1\ m/s^2 \qquad (17)$$