Meccanica applicata alle macchine

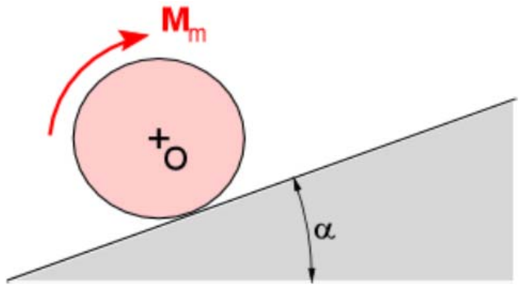
Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

Ed.: De Agostini

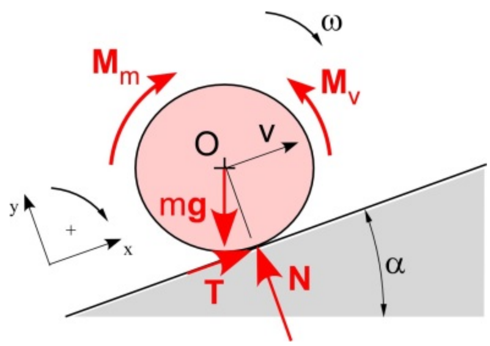
Esercizio 6.06

Un rullo, di massa *m = 10 kg*, raggio *r = 250 mm* e raggio d'inerzia ρ = *200 mm*, parte da fermo ed inizia a rotolare su un piano di pendenza pari al *35%* sotto l'effetto della coppia motrice costante M_m=*15 Nm*; i coefficienti di attrito statico, dinamico e volvente nel contatto col piano valgono rispettivamente: $f_s = 0{,}50$, $f_d = 0{,}45$, $f_v = 0{,}03$.

Determinare lo spazio percorso dal rullo dopo aver effettuato 100 giri.



Svolgimento



Si scrivano le equazioni di equilibrio dinamico del rullo:

$$\uparrow + \qquad \sum F_y = 0 \qquad N - mg \cdot \cos\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\rightarrow + \qquad \sum F_x = m\dot{v} \qquad T - mg \cdot sen\alpha = m\dot{v} \tag{2}$$

$$\sum_O M_z = I\dot{\omega} \qquad M_m - T \cdot r - f_v N \cdot r = I\dot{\omega} \tag{3}$$

avendo indicato con *I* il momento d'inerzia baricentrico del rullo. Si imponga la condizione di puro rotolamento, che andrà poi verificata:

$$v = \omega \cdot r \qquad \Rightarrow \qquad \dot{v} = \dot{\omega} \cdot r \tag{4}$$

Il sistema risulta in questo caso ad 1 solo grado di libertà e le equazioni (1-4) consentono di ricavare il valore delle 4 incognite *N, T*, $\dot{v}$, $\dot{\omega}$; in particolare, per quanto riguarda la forza di attrito *T* si ottiene:

$$T = \frac{r^2}{\rho^2 + r^2}\left({M_m}/{r} - f_v mg \cdot \cos\alpha \right) + \frac{\rho^2}{\rho^2 + r^2} mg \cdot sen\alpha \qquad (5)$$

in cui si è utilizzata la definizione di raggio d'inerzia ρ: $I = m\,\rho^2$.

Per valutare il valore di *T* occorre ricavare l'angolo di inclinazione del piano:

$$\alpha = \arctan\frac{h}{100} = 0{,}34\ \text{rad} = 19{,}3° \qquad (6)$$

Sostituendo tutti i dati in (5), si trova *T = 47,5 N*; a questo punto è possibile verificare l'aderenza del rullo al suolo:

$$T/N = 0{,}51 > f_s = 0{,}50 \qquad (7)$$

Pertanto l'ipotesi fatta di aderenza era errata (sia pure di pochissimo) ed il rullo in realtà striscia rispetto al suolo. Per ottenere le equazioni del moto, il sistema (1-3) deve allora essere integrato con l'equazione:

$$T = f_d \cdot N \qquad (8)$$

e non con la (4), come prima ipotizzato; in questo caso dalle (1-3), (8) si ricavano facilmente 2 equazioni differenziali, che forniscono rispettivamente l'andamento della velocità lineare e di quella angolare (infatti in questo caso il sistema risulta a 2 gradi di libertà):

$$\dot{v} = \left(f\cos\alpha - sen\alpha \right) g = 0{,}93\ \text{m/s}^2 \qquad (9)$$

$$\dot{\omega} = \frac{M_m - mgr\cos\alpha\left(f + f_v\right)}{I} = 9{,}72\ \text{rad/s}^2 \qquad (10)$$

Imponendo condizioni iniziali nulle ad entrambe le (9) e (10), si trova:

$$x(t) = \frac{1}{2}\dot{v}t^2 = 0{,}46\ \text{t}^2 \qquad (11)$$

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\dot{\omega}\,t^2 = 4{,}86\,t^2 \qquad (12)$$

Pertanto dalla (12) si può ora ricavare il tempo necessario affinché il rullo compia una rotazione di *100 giri*:

$$100 \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\dot{\omega}\,\bar{t}^2 \Rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{400\pi}{\dot{\omega}}} = 11{,}4\ \ \text{s} \qquad (13)$$

ed in tale tempo lo spazio percorso vale:

$$x(t) = \frac{1}{2}\dot{v}\bar{t}^2 = 0{,}46\,\bar{\text{t}}^2 = 59{,}8\,\text{m} \qquad (14)$$