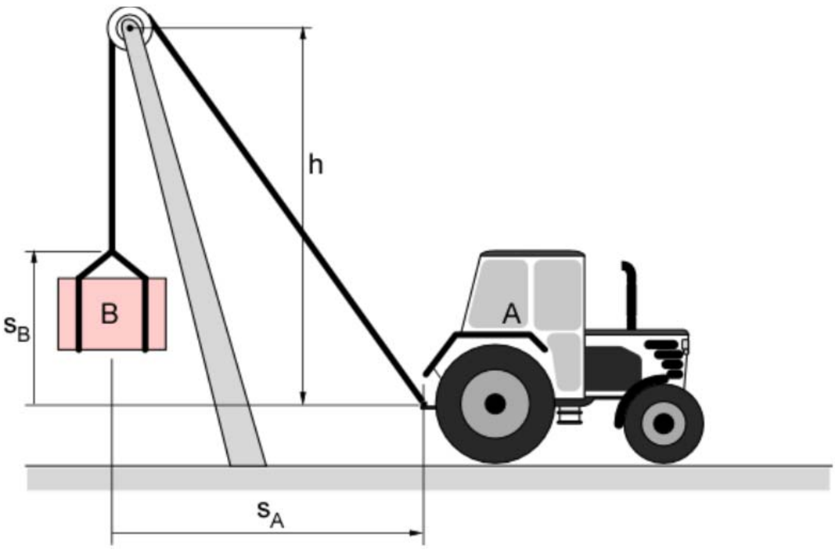
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano
Ed.: De Agostini

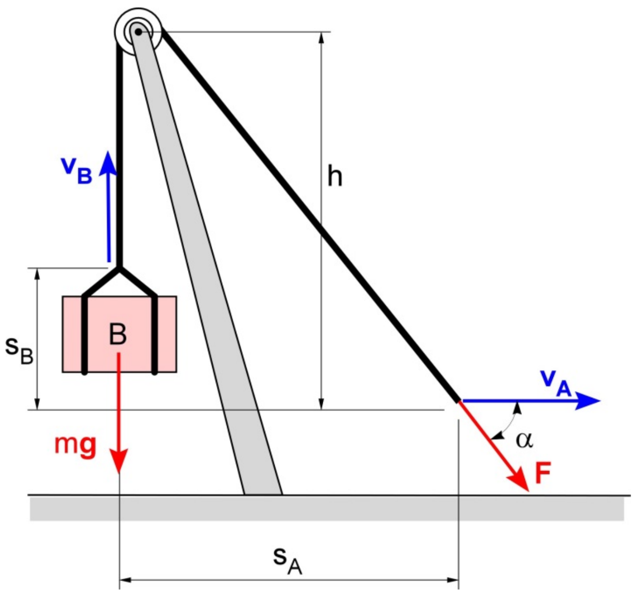
Esercizio 6.05

Il trattore in figura è utilizzato per sollevare il carico *B* di massa $m=150\ kg$ attraverso una fune di lunghezza $2h=24\ m$. Sapendo che nell'istante considerato il trattore si trova alla distanza $s_A=5\ m$ dal carico e si muove verso destra con velocità $v=4\ m/s$ ed accelerazione $a=3\ m/s^2$, determinare la tensione nella fune.

(Si noti che per $s_A=0$ vale anche $s_B=0$)



Svolgimento



Metodo energetico

Si scriva il bilancio energetico del sistema in termini di potenze come segue:

$$P_m - P_r - P_p = \frac{d}{dt}T \tag{1}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v_A} - |M\mathbf{g}\cdot\mathbf{v_B}| = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_B^2\right) \tag{2}$$

$$v_A F\cdot cos\alpha - v_B\cdot Mg = Mv_B a_B \tag{3}$$

Si noti che, dato il moto rettilineo del punto **B**, vale in questo caso: $\dot{v}_B = a_B$. Il valore dell'angolo α si può ricavare facilmente dall'esame della figura:

$$cos\alpha = \frac{s_A}{\sqrt{s_A^2+h^2}} = 67° \tag{4}$$

mentre $\mathbf{v_B}$ è la velocità della fune in ogni suo tratto, per cui dalla scomposizione delle velocità nel punto **A** si trova:

$$v_B = v_A\cdot cos\alpha = 1{,}5 \text{ m/s} \tag{5}$$

$$v_B = \frac{s_A}{\sqrt{s_A^2+h^2}}v_A \tag{6}$$

A questo punto l'equazione (3) diventa:

$$v_A F\cdot cos\alpha - v_A\cdot cos\alpha\cdot mg = mv_A\cdot cos\alpha\cdot a_B \tag{7}$$

$$F - mg = m\cdot a_B \tag{8}$$

che rappresenta l'equilibrio dinamico della massa *m*; il valore della tensione della fune vale perciò:

$$F = m(g + a_B) \tag{9}$$

Per poter valutare l'espressione (9) occorre calcolare l'accelerazione del carico a_B; essa può essere ricavata dalla derivazione diretta della (6):

$$a_B = \frac{(v_A^2+s_A\cdot a_A)\sqrt{s_A^2+h^2}-\frac{1}{2}s_A\cdot v_A(s_A^2+h^2)^{-1/2}\cdot 2s_A\cdot v_A}{s_A^2+h^2} = \frac{(v_A^2+s_A\cdot a_A)(s_A^2+h^2)-s_A^2\cdot v_A^2}{(s_A^2+h^2)^{3/2}} = 2{,}2\ m/s^2 \tag{10}$$

e quindi *T= 1 801 N*.

Equilibrio dinamico

L'equilibrio della massa *m* fornisce direttamente:

$$T - mg = ma_B \tag{11}$$

$$T = m(g + a_B) \tag{12}$$

Per calcolare l'accelerazione della massa *m* basta imporre la costanza della lunghezza della fune:

$$h - s_B + \sqrt{s_A^2 + h^2} = 2h \tag{13}$$

Derivando la (13) si ottiene dapprima la (6) e poi la (10).