Meccanica applicata alle macchine

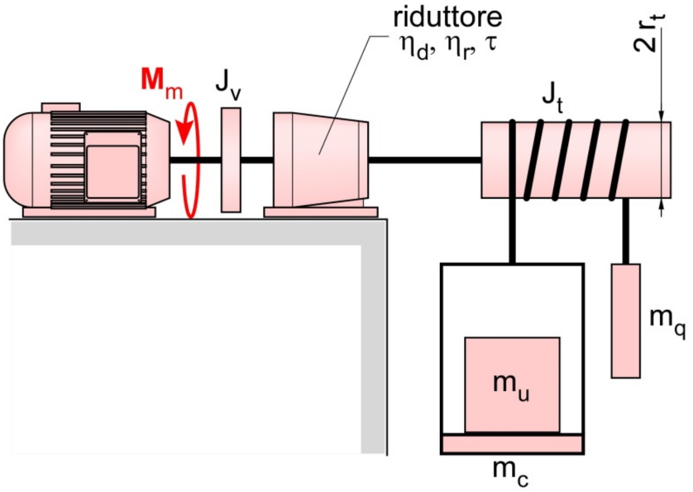
Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

Ed.: De Agostini

Esercizio 6.34

Un impianto di sollevamento carichi è azionato da un motore elettrico collegato ad un tamburo attraverso un riduttore di velocità; sull'asse del motore è calettato un volano mentre sul tamburo si avvolge una fune collegata da un lato al carico da sollevare e dall'altro al contrappeso. Determinare la coppia motrice M_{m0} necessaria a trascinare in discesa il carico in condizioni di regime (considerare separatamente il caso di impianto vuoto e quello a pieno carico); inoltre calcolare l'accelerazione del carico stesso nel caso in cui sia applicata dal motore una coppia frenante pari a $1{,}5\ M_{m0}$ durante la discesa a pieno carico.

Sono noti: momento d'inerzia del volano $J_v=0{,}025\ kg\ m^2$ e del tamburo $J_t=0{,}6\ kg\ m^2$; raggio del tamburo $r_t=200\ mm$; massa della cabina a vuoto $m_c=450\ kg$, del massimo carico utile $m_u=450\ kg$ e del contrappeso $m_q=675\ kg$; rapporto di trasmissione del riduttore $\tau=1{:}30$; rendimento del riduttore per flusso di potenza diretto e retrogrado $\eta_d=0{,}80$ e $\eta_r=0{,}65$.



Svolgimento

Moto a regime

Durante il moto a regime in discesa, occorre distinguere 2 situazioni differenti. Se l'impianto scende a pieno carico, il peso complessivo di cabina e carico risulta superiore a quello del contrappeso, per cui il flusso di potenza è certamente retrogrado. L'equazione di bilancio energetico del sistema porta alla seguente relazione:

$$P_m = \eta_r P_u \rightarrow M'_{m0}\omega_m = \eta_r \left(m_c + m_u - m_q\right) g \cdot v \tag{1}$$

$$M'_{m0} = \eta_r \left(m_c + m_u - m_q\right) \tau r_t g = 9{,}6\ Nm \tag{2}$$

Se l'impianto scende scarico, poiché il peso della cabina risulta inferiore a quello del contrappeso, il flusso di potenza è certamente diretto. L'equazione di bilancio energetico del sistema porta alla seguente relazione:

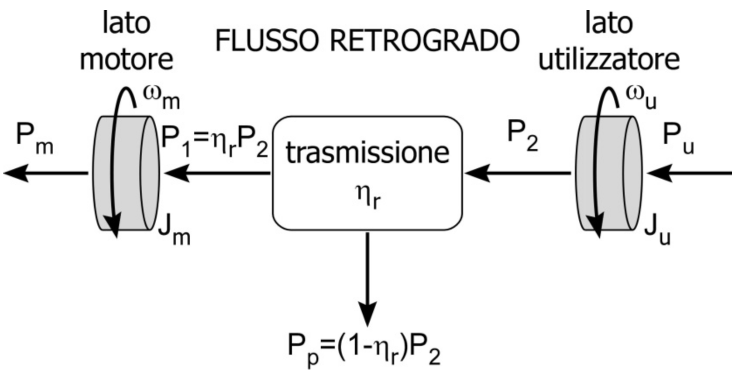
$$P_u = \eta_d P_m \rightarrow \left(m_q - m_c\right)g \cdot v = \eta_d M''_{m0}\omega_m \tag{3}$$

$$M''_{m0} = \left(m_q - m_c\right)\frac{\tau r_t g}{\eta_d} = 18{,}4\ Nm \tag{4}$$

Pertanto per trascinare la cabina in discesa sotto ogni condizione di carico, il motore deve erogare una coppia pari ad almeno $M_{m0} = M''_{m0} = 18{,}4\ Nm$.

Moto accelerato

Durante il moto transitorio, che avviene in discesa a piano carico, la potenza fuoriesce dal lato motore (freno-motore) ed entra dal lato del carico (il peso della cabina sviluppa una potenza superiore a quella del contrappeso); pertanto si ipotizza un flusso di potenza retrogrado, anche se le coppie d'inerzia potrebbero in teoria cambiare tale verso.



L'equilibrio dei 3 blocchi indicati in figura fornisce:

$$\begin{cases} P_1 - P_m = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J_v\omega_m^2\right) \\ P_1 = \eta_r P_2 \\ P_u - P_2 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J_t\omega_t^2 + \dfrac{1}{2}\left(m_c + m_u + m_q\right)v^2\right) \end{cases} \tag{5}$$

ovvero, eseguendo le derivate:

$$\begin{cases} P_1 - M_{fm}\omega_m = J_v\omega_m\dot{\omega}_m \\ P_1 = \eta_r P_2 \\ \left(m_c + m_u - m_q\right)gv - P_2 = J_t\omega_t\dot{\omega}_t + \left(m_c + m_u + m_q\right)v\dot{v} \end{cases} \tag{6}$$

Il sistema precedente deve essere risolto per trovare le incognite *P₁, P₂* e le accelerazioni $\dot{\omega}_m$, $\dot{\omega}_t$ e $\dot{v}$; a tal fine occorre tenere conto delle relazioni cinematiche:

$$\begin{cases} \omega_t = \tau\omega_m \\ v = \omega_t r_t = \tau r_t \omega_m \end{cases} \tag{7}$$

Si ottiene pertanto:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_m = \dfrac{\eta_r \tau \left(m_c + m_u - m_q\right) g r_t - 1{,}5 M_{m0}}{J_v + \tau^2 \eta_r J_p + \eta_r \tau^2 r_t^2 \left(m_c + m_u + m_q\right)} \\ P_1 = 1{,}5 M_{m0} \omega_m + J_v \omega_m \dot{\omega}_m \\ P_2 = \dfrac{1}{\eta_r}\left(1{,}5 M_{m0} \omega_m + J_v \omega_m \dot{\omega}_m\right) \end{cases} \tag{8}$$

Sostituendo i valori del problema:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_m = -254{,}1 \, \mathrm{rad/s^2} \\ P_1 = 21{,}2 \, \omega_m \\ P_2 = 32{,}7 \, \omega_m \end{cases} \tag{9}$$

L'accelerazione angolare è negativa in quanto l'albero motore decelera, mentre il valori positivi di P_1 e P_2 confermano l'assunzione effettuata sul verso del flusso di potenza.

La decelerazione del carico vale pertanto:

$$\dot{v} = \tau r_t \dot{\omega}_m = -1{,}7 \, \mathrm{m/s^2} \tag{10}$$